



**CUỘC THI
THỬ THÁCH TOÁN HỌC CÙNG KHOA TOÁN VÀ THỐNG KÊ
NĂM 2023**

Đợt 1, Tuần 4 (Từ 06/4 đến 13/4/2023)

Thời gian nộp bài: Trước 22h, ngày 13/4/2023

Câu 1. Giải hệ phương trình ẩn $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sqrt{y+1} + y^2 - xy + 2y = \sqrt{2x+2} + 2x^2 + 7x + 3 \\ 10 \log_2(x+y) + y^2 + 9 = x^2 + 7x + 10y. \end{cases}$$

Câu 2. Cho tam giác nhọn ABC , với $AB < AC$, có trực tâm H . Gọi L là giao điểm của hai đường tiếp tuyến của đường tròn (HCB) tại B, C (ta lần lượt ký hiệu hai tiếp tuyến này là BB và CC). Đường thẳng qua B và song song với HC cắt CC tại D , đường thẳng qua C và song song với HB cắt BB tại E . Gọi T là giao điểm của đường tròn (BDC) và HC , S là giao điểm của đường tròn (BEC) và HB . Chứng minh ba đường thẳng HL, ST, BC đồng quy.

Câu 3. Cho hai số nguyên dương n, d . Ký hiệu \mathbb{N}_d^n là tập tất cả các bộ n số nguyên không âm sao cho tổng của chúng không vượt quá d , tức là

$$\mathbb{N}_d^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq d\}.$$

Đặt

$$\begin{aligned} \Omega_d^n &= \mathbb{N}_d^n + \mathbb{N}_d^n := \{\alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_d^n\} \subseteq \mathbb{N}_{2d}^n; \\ \Gamma_d^n &= \mathbb{N}_d^n - \mathbb{N}_d^n := \{\alpha - \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_d^n\}; \end{aligned}$$

- a) Tính số phần tử của $\mathbb{N}_d^n, \Omega_d^n$.
- b) Tính số phần tử của các tập Γ_d^2, Γ_d^3 và Γ_d^4 theo d .

Câu 4. Hỏi có tất cả bao nhiêu đa thức dạng

$$P(x) = b_{22}x^{22} + b_{21}x^{21} + \dots + b_1x + b_0, \quad b_i \in \{0, 1\} \text{ với mọi } i = 0, 1, \dots, 22,$$

thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) Không có hai hệ số của hai lũy thừa liên tiếp của đa thức $P(x)$ cùng bằng 1;
- ii) Không nhiều hơn hai hệ số của hai lũy thừa liên tiếp của đa thức $P(x)$ cùng bằng 0.

Câu 5. Cho số thực $\alpha \in [0; 1]$ thỏa mãn $\frac{1}{4} < \{3^n \alpha\} < \frac{3}{4}$ với mọi số tự nhiên n , trong đó ký hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x . Chứng minh rằng $\alpha = \frac{1}{2}$.

Ghi chú:

- Đề gồm 06 câu, mỗi câu 10 điểm.
- Với mỗi câu, khuyến khích học sinh có lời bình hoặc mở rộng kết quả sau khi đã đưa ra lời giải của mình.
- Sẽ có giải riêng cho bạn nào đưa ra được công thức tổng quát cho số phần tử của tập Γ_d^n trong Câu 3 theo n và d .