



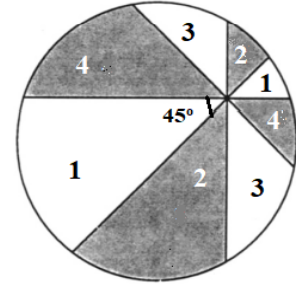
**CUỘC THI
THỬ THÁCH TOÁN HỌC CÙNG KHOA TOÁN VÀ THỐNG KÊ
NĂM 2023**

Đợt 1, Tuần 3 (Từ 30/3 đến 05/4/2023)

Thời gian nộp bài: Trước 22h, ngày 05/4/2023

Câu 1. Có một chiếc bánh pizza.

Người ta cắt chiếc bánh này bằng 4 lần cắt theo 4 đường thẳng đồng quy tại một điểm nào đó nằm trong chiếc bánh, chia chiếc bánh thành 8 phần sao cho góc có đỉnh tại giao điểm nói trên của mỗi phần đều có số đo bằng 45° . Chứng minh rằng các phần được đánh số 1, 2, 3, 4 có diện tích bằng nhau (chú ý rằng mỗi phần gồm 2 phần nhỏ được đánh số giống nhau).



Câu 2. Có tồn tại hay không một đa giác đều có 2023 đỉnh và mọi đỉnh đều có tọa độ nguyên? Giải thích.

Câu 3. Cho tam giác ABC và các điểm D, E lần lượt nằm trên cạnh AC, AB và khác A . Đường tròn đi qua hai điểm A, E và tiếp xúc với AC cắt đường tròn đi qua A, D và tiếp xúc với AB tại A và H . Đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với AC cắt đường tròn đi qua A, C và tiếp xúc với AB tại A và G . Các đường tròn (ABD) và (ACE) cắt nhau tại A và F . Chứng minh các điểm A, H, G, F đồng viên.

Câu 4. Cho dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ được xác định bởi

$$x_1 = \alpha \in (0, 1), x_{n+1} = x_n - nx_n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Đặt $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng $(y_n)_{n \geq 1}$ có giới hạn hữu hạn.

Câu 5. Tìm tất cả đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$2P^2(x) = 5P(x^2 - 3) + 2, \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Câu 6. Cho ngũ giác $ABCDE$ có $\widehat{C} = \widehat{E} = 135^\circ, \widehat{D} = 90^\circ, \tan A = 3, CD = a, DE = 2a, EA = a\sqrt{2}$. Hãy tìm trên mặt phẳng (α) chứa ngũ giác điểm M sao cho tổng

$$MA + \sqrt{2}MB + MC + MD + ME$$

là nhỏ nhất.

Ghi chú:

- Đề gồm 06 câu, mỗi câu 10 điểm.

- Với mỗi câu, khuyến khích học sinh có lời bình hoặc mở rộng kết quả sau khi đã đưa ra lời giải của mình.